種々のファジィ前提をもつファジィ推論 (多値論理およびその応用)

水本, 雅晴

数理解析研究所講究録
455巻 1982年 176-190

種々のファジィ前提をもつファジィ推論

阪電通大　　水本 雅晴

Fuzziness の意味でのあいまいさを含んだファジィ推論

$$\begin{array}{l} \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \\ \underline{x \text{ is } A'.\qquad\qquad\qquad} \\ \therefore\ y \text{ is } B'. \end{array}$$

ここで A, A', B, B' はファジィ概念，に対して A' として A に highly, slightly, sort of, …といった言語修飾語を施した場合に，どのような推論結果 B' が得られるかを今迄に提案されている推論法に対して調べ，比較，検討する．その結果，以前筆者らが提案した方法 R_s がやはり最も妥当な推論結果を得ることを示す．

1. まえがき

我々は日頃いわゆる fuzziness の意味でのあいまいな概念を含んだ推論をしばしば行っている．このあいまいな推論の例として

$$\begin{array}{ll} \text{前提1}: & \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \\ \underline{\text{前提2}:} & \underline{x \text{ is } A'.\qquad\qquad\qquad} \\ \text{結論}: & y \text{ is } B'. \end{array}$$

がある（A, A', B, B' はファジィ概念）．このように，ファジィ条件文 "If x is A then y is B" を前提として含むようなファジィ

推論に対して，Zadeh[1]は前提1，2から結論B'を得る方法として"推論の合成規則"と呼ばれる方法を定式化した．その際，彼はファジィ条件文"If x is A then y is B"はAとBの間の何らかの関係を表わしていることに着目し，このファジィ条件文をファジィ関係に変換する方法を与えた．その後，Mamdani[2]，や筆者ら[3-12]はこの変換法として数多くの方法を提案した．これに関連して筆者は文献[3-12]において前提2の"x is A'"において，A'がA, very A, more or less A, not Aとなった場合，結論B'としてどのような推論結果が得られるかを示し，各方法との比較を行った．

ところで，Zadeh[13]はファジィ集合に作用する演算子として，very, more or less, slightly, sort of, … といった言語修飾語の概念を導入し，ファジィ・セマンティックの定量的な解析を行った．本報告では，A'としてAにこれらの言語修飾語を施したhighly A, slightly A, sort of A, … を採用した場合，B'としてどのような推論結果が得られるかを今迄に提案されている方法に適用することにより調べ，各方法との比較を行う．この結果，筆者らが提案した方法Rsがやはり妥当な推論結果を得ることを示す．

2. 言語修飾語

以後の議論のために，Zadehによって与えられた"言語修飾語"(linguistic hedge)(以後，簡単に"修飾語"という)のあらましを述べておこう．また，広い意味での人工的な修飾語とみなせるファジィ集合の変換法についても2，3提案する．

全体集合Uにおける<u>ファジィ集合</u>Aとは

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

なるメンバーシップ関数μ_Aによって特性づけられた集合で，値$\mu_A(u)$は要素$u (\in U)$がAに所属する度合(グレード)を表わしている．ファジィ集合Aは

$$A = \int_U \mu_A(u)/u$$

のように表現される．ここで記法$\int_U$はU全体にわたる$\mu_A(u)/u$の結び(union)を表わしている．/ はセパレータである．

A, B を U におけるファジィ集合とすると

交わり: $A \cap B = A \text{ and } B = \int_U \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)/u$

結び: $A \cup B = A \text{ or } B = \int_U \mu_A(u) \vee \mu_B(u)/u$

補集合: $\neg A = \text{not } A = \int_U 1 - \mu_A(u)/u$

限界和: $A \oplus B = \int_U 1 \wedge (\mu_A(u) + \mu_B(u))/u$

べき集: $A^\alpha = \int_U \mu_A(u)^\alpha/u$

スカラー積: $\alpha A = \int_U \alpha\mu_A(u) \wedge 1/u$

ここで，$\wedge$, $\vee$, $+$ はそれぞれ min, max, 足算を表わす．

次に，Zadehによって定義されたファジィ集合Aに対する演算子としての修飾語を羅列してみると以下のようになる(図1参照)．

まず，べき乗A^αの特別の場合として

$$CON(A) = \text{very } A = A^2 \tag{1}$$

$$DIL(A) = \text{more or less } A = A^{0.5} \tag{2}$$

$$\text{minus } A = A^{0.75} \tag{3}$$

$$\text{plus } A = A^{1.25} \tag{4}$$

$$\text{highly } A = \text{plus very } A = A^{2.5} \tag{5}$$

が得られる．ここで，CON, DIL は *concentration*, *dilation* の略字である．また，*minus*, *plus* は人工的な修飾語である．

$$INT(A) = \int_U \mu_{INT(A)}(u)/u \tag{6}$$

ここで

$$\mu_{INT(A)}(u) = \begin{cases} 2\mu_A(u)^2 & \cdots \quad 0 \leqq \mu_A(u) \leqq 0.5 \\ 1 - 2(1-\mu_A(u))^2 & \cdots \quad 0.5 \leqq \mu_A(u) \leqq 1 \end{cases}$$

$$NORM(A) = \frac{1}{\mu_A^*} A$$

ここで，$\mu_A^* = \bigvee_u \mu_A(u)$

INT, NORM は contrast intensification, normalization の略字である．NORM(A) は A を正規化（A の最大グレードを 1 に）することを表わしている．

以上のような演算子を使用することによって次のような修飾語が定義できる．

$$\text{slightly } A = \mathrm{NORM}(A \cap \neg \mathrm{CON}(A)) \tag{7}$$
$$= \mathrm{NORM}(A \text{ and not very } A)$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\int_U \mu_A(u) \wedge (1-\mu_A(u)^2)/u\right).$$

$$\text{sort of } A = \mathrm{NORM}(\mathrm{DIL}(A) \cap \neg \mathrm{CON}(A)^2) \tag{8}$$
$$= \mathrm{NORM}(\text{more or less } A \text{ but not very very } A)$$
$$\fallingdotseq 1.234\left(\int_U \mu_A(u)^{0.5} \wedge (1-\mu_A(u)^4)/u\right).$$

以上が Zadeh によって与えられた修飾語の主なものである．これらの修飾語の例を見ても分るように，修飾語はファジィ集合 A を何らかの意味をもたせるように変換させる方法，いいかえれば，広い意味で A に対する関数であるといえる．このことから，A に対する変換として以下のものを導入することができる．

まず，式(6)の INT(A) の反対の作用をさせるものとして WEAK(A) を与えることができる．WEAK は contrast weakening の略である．

$$\mathrm{WEAK}(A) = \int_U \mu_{\mathrm{WEAK}(A)}(u)/u \tag{9}$$

$$\mu_{\mathrm{WEAK}(A)}(u) = \begin{cases} -2(\mu_A(u)^2 - \mu_A(u)) & \cdots\ 0 \leqq \mu_A(u) \leqq 0.5 \\ 2(\mu_A(u) - 0.5)^2 + 0.5 & \cdots\ 0.5 \leqq \mu_A(u) \leqq 1 \end{cases}$$

中間グレード（0.5 付近）を強化させる作用として MIDI(A) を与えることができる．MIDI は middle intensification の略である．すなわち

$$\mathrm{MIDI}(A) = \mathrm{NORM}(A \cap \neg A) \tag{10}$$

$$= 2(A \cap \neg A)$$
$$= \int_U 2\mu_A(u) \wedge 2(1-\mu_A(u))/u$$

この逆の作用として中間グレードを弱化させるものとして(middle weakening),

$$\mathrm{MIDW}(A) = \neg\,\mathrm{MIDI}(A) \qquad (11)$$
$$= \neg 2(A \cap \neg A)$$
$$= \int_U (1-2\mu_A(u)) \vee (2\mu_A(u)-1)/u$$

Aのグレードがα以上のものを1に，その他の場合を0にする変換として

$$\alpha\mathrm{CUT}(A) = \int_U \mu_{\alpha\mathrm{CUT}(A)}(u)/u \qquad (12)$$
$$\mu_{\alpha\mathrm{CUT}(A)}(u) = \begin{cases} 1 & \cdots\ \mu_A(u) \geq \alpha \\ 0 & \cdots\ \mu_A(u) < \alpha \end{cases}$$

逆に，グレードがα以下のものを1に，その他の場合を0に変換するものとして

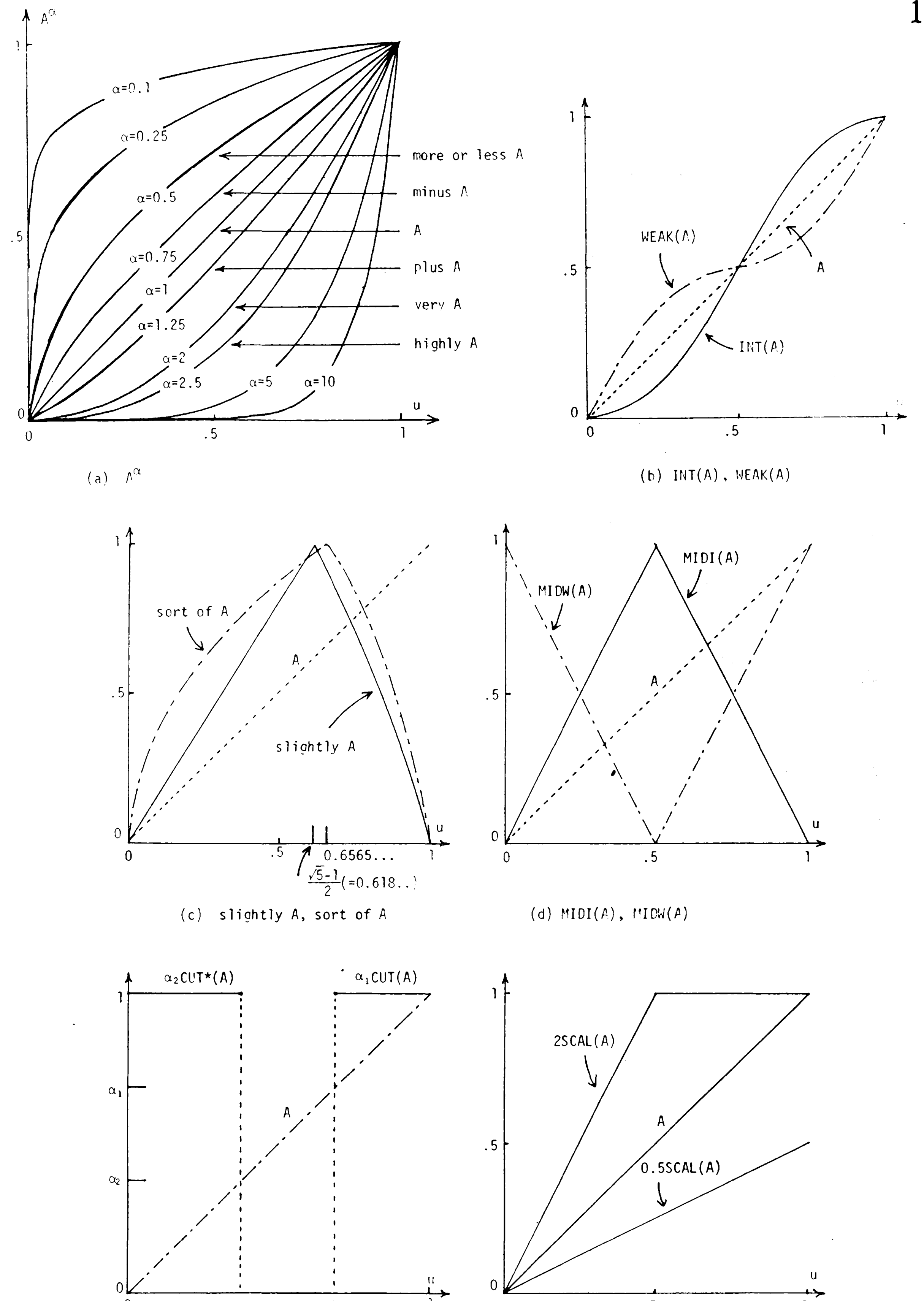
$$\alpha\mathrm{CUT}^*(A) = \int_U \mu_{\alpha\mathrm{CUT}^*(A)}(u)/u \qquad (13)$$
$$\mu_{\alpha\mathrm{CUT}^*(A)}(u) = \begin{cases} 1 & \cdots\ \mu_A(u) \leq \alpha \\ 0 & \cdots\ \mu_A(u) > \alpha \end{cases}$$

最後に，スカラー積αAを表わすものとして

$$\alpha\mathrm{SCAL}(A) = \int_U \alpha\mu_A(u) \wedge 1/u \qquad (14)$$

を与える．

以上，式(1)－(14)で与えたファジイ集合Aに対する変換の結果を図に表わすと図1のようになる．ここで，AはU＝[0, 1]上のファジイ集合で，$A = \int_{[0,1]} u/u$である．図1(a)は式(1)－(5)までの修飾語の他に，参考のために，A^αも描いてある．



(a) A^α

(b) INT(A), WEAK(A)

(c) slightly A, sort of A

(d) MIDI(A), MIDW(A)

(e) αCUT(A), αCUT*(A)

(f) αSCAL(A)

図1 ファジィ集合Aの種々の修飾語

3. ファジィ推論

以上得られた修飾語を利用することによりファジィ推論を考えてみよう.

今,次のようなファジィ推論形式を考えてみる.

$$
\begin{array}{ll}
\text{前提1:} & \text{If } x \text{ is } A \text{ then } y \text{ is } B. \\
\text{前提2:} & x \text{ is } A'. \\
\hline
\text{結論:} & y \text{ is } B'.
\end{array}
\qquad (17)
$$

ここで,x,yは対象名であり,A,A',B,B'はファジィ概念を表し,それぞれU,U,V,V上のファジィ集合である.

このような推論形式に対して,もし$A'=A$,$B'=B$であるとすると,式(17)はいわゆる"modus ponens(肯定法)"に還元される.この意味から式(17)をファジィmodus ponensと名付けることにする.以後,式(17)を簡単のために

$$
\begin{array}{l}
A \Rightarrow B \\
A' \\
\hline
B'
\end{array}
\qquad (18)
$$

と書くことにしよう.

ファジィ条件文$A \Rightarrow B$を$U \times V$におけるファジィ関係に変換する方法として,Zadeh(1), Mamdani(2), および筆者(3-12)は次の方法を与えた.Rm(maximin規則),Ra(算術規則)はZadehにより,Rc(min規則)はMamdaniによって与えられたものであり,その他は筆者により多値論理の含意の公式より導入したものである.

A,BをそれぞれU,Vにおけるファジィ集合とし,$\times$をファジィ集合の直積とすると,

$$
\begin{aligned}
R_m &= (A \times B) \cup (\neg A \times V) \qquad (19)\\
&= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v)
\end{aligned}
$$

$$R_a = (\neg A \times V) \oplus (U \times B) \tag{20}$$
$$= \int_{U\times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v)$$

$$R_c = A \times B \tag{21}$$
$$= \int_{U\times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u, v)$$

$$R_s = A \times V \underset{s}{\rightarrow} U \times B \tag{22}$$
$$= \int_{U\times V} [\mu_A(u) \underset{s}{\rightarrow} \mu_B(v)] / (u, v)$$
$$\mu_A(u) \underset{s}{\rightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \\ 0 & \cdots \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$R_g = A \times V \underset{g}{\rightarrow} U \times B \tag{23}$$
$$= \int_{U\times V} [\mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_B(v)] / (u, v)$$
$$\mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \\ \mu_B(v) & \cdots \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$R_b = (\neg A \times V) \cup (U \times B) \tag{24}$$
$$= \int_{U\times V} 1 - \mu_A(u) \vee \mu_B(v) / (u, v)$$

$$R_\Delta = A \times V \underset{\Delta}{\rightarrow} U \times B \tag{25}$$
$$= \int_{U\times V} [\mu_A(u) \underset{\Delta}{\rightarrow} \mu_B(v)] / (u, v)$$
$$\mu_A(u) \underset{\Delta}{\rightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \cdots \mu_A(u) \leqq \mu_B(v) \\ \dfrac{\mu_B(v)}{\mu_A(u)} & \cdots \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

これより，式(17)，(18)の結論B'はA'と各ファジィ関係との合成(max-min合成)"∘"を行うことにより得られる(推論

の合成規則）．たとえば，式(19)に対しては

$$B'_m = A' \circ R_m = A' \circ [(A\times B)\cup(\neg A\times V)] \tag{26}$$

と与えられ，B'_m のメンバーシップ関数は

$$\mu_{B'_m}(v) = \bigvee_u \{\mu_{A'}(u)\wedge \mu_{R_m}(u,v)\} \tag{27}$$

$$= \bigvee_u\{\mu_{A'}(u)\wedge[(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))]\}$$

となる．同様に

$$B'_a = A'\circ[(\neg A\times V)\oplus(U\times B)] \tag{28}$$

$$B'_c = A'\circ(A\times B) \tag{29}$$

$$B'_s = A'\circ[A\times V \underset{s}{\Rightarrow} U\times B] \tag{30}$$

$$\vdots$$

と与えられる．

次に，A'が式(1)−(14)で与えられた修飾語を施したAである場合，ファジィ条件文$A\Rightarrow B$の下でどのような結論B'が得られるかを，各方法に対して求めてみよう．

まず，べき乗A^αより始めよう．式(1)−(5)から分るようにαが特別の値を取ると，very A, more or less A, minus A, plus A, highly A が得られる．ここでは一般的な場合として，A'が$A'=A^\alpha$である場合を考える．すると，結論B'は，たとえば方法R_m(式(19))による場合，式(27)より

$$\mu_{B'_m}(v) = \bigvee_u\{\mu_A(u)^\alpha\wedge[(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))]\} \tag{31}$$

と与えられる．簡単のために"(u)", "(v)"を省略すると

$$\mu_{B'_m} = \bigvee_u\{\mu_A^\alpha\wedge[(\mu_A\wedge\mu_B)\vee(1-\mu_A)]\}$$

と書き換えられる．さらに，$\mu_A(u)$が，$u\in U$に対して$[0,1]$内のすべての値を取る，すなわち，μ_Aは$[0,1]$上への関数であ

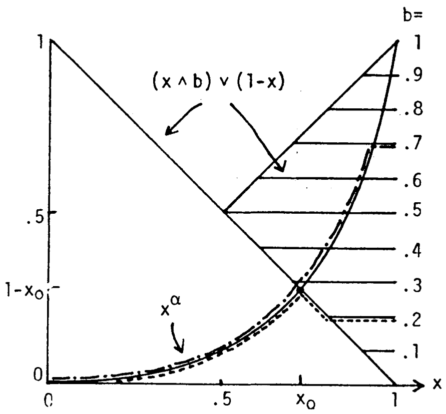


図2. 式(32)の求め方

ると仮定すると，上式は

$$b_m' = \bigvee_x \{x^\alpha \wedge [(x \wedge b) \vee (1-x)]\} \qquad (32)$$

と書き換えられる．ここで

$$x = \mu_A,\ b = \mu_B,\ b_m' = \mu_{B_m'} \qquad (33)$$

これより，x^α，および $(x \wedge b) \vee (1-x)$ を b をパラメターとして描くと図2のようになる．x^α が図のような場合，たとえば，$b = 0.2$ の時，式(32)内の

$$x^\alpha \wedge [(x \wedge b) \vee (1-x)] \qquad (34)$$

は点線部のようになり，その最大値（式(32)の意味より）は x^α と $1-x$ の交点の高さとして与えられる．すなわち，$x^\alpha = 1-x$ の解を $x_0 (\in [0,1])$ とすると最大値は $1-x_0$ と与えられる．よって

$b_m' = 1 - x_0 \ \cdots\ b \leqq 1 - x_0$ の時

一方，$b = 0.7\ (\geqq 1-x_0)$ の時，式(34)は一点鎖線で与えられ，最大値は $b (= 0.7)$ となる．よって

$b_m' = b \ \cdots\ b \geqq 1 - x_0$ の時

したがって，一般に

$$b_m' = \begin{cases} 1 - x_0 & \cdots\ b \leqq 1 - x_0 \\ b & \cdots\ b \geqq 1 - x_0 \end{cases}$$

すなわち

$$b_m' = (1 - x_0) \vee b$$

が得られる．この結果は任意の α に対しても成立することが確かめられる．よって，式(33)の記法から

$$\mu_{B_m'} = (1 - x_0) \vee \mu_B \qquad (35)$$

となる．ここで，$x_0 (\in [0,1])$ は $x^\alpha = 1 - x$ の解である．

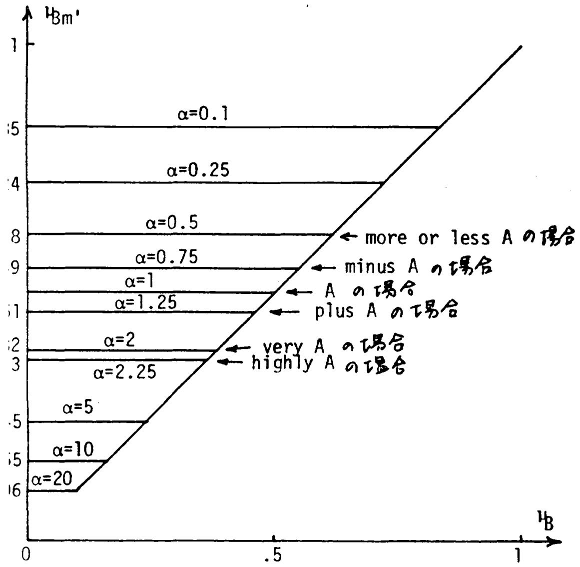


図3　$Bm' = A^{\alpha} \circ Rm$

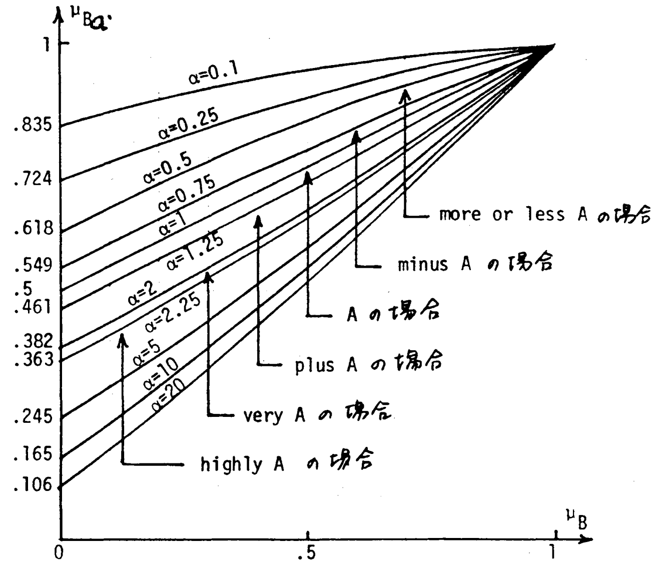


図4　$Ba' = A^{\alpha} \circ Ra$

同様な方法をRa(式(20))に適用すると図4のような推論結果が得られる. さらに, 他のA'に対する推論結果を求めると表1のようになる. なお, $A' = INT(A)$, $WEAK(A)$の場合, 方法R_Δに対しては次のような結果が得られる.

$B_\Delta' = INT(A) \circ R_\Delta$の場合:

$$\mu_{B_\Delta'} = \begin{cases} \sqrt[3]{2\mu_B^2} & \cdots\ 0 \leqq \mu_B \leqq 0.25 \\ \dfrac{\mu_B}{x} & \cdots\ 0.25 \leqq \mu_B \leqq 1 \end{cases} \qquad (36)$$

ここで,

$$x = \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{10}\cos\frac{\theta + \pi}{3}\right),$$

$$\theta = \cos^{-1}\left\{\frac{\sqrt{10}}{50}(27\mu_B - 14)\right\}.$$

$B_\Delta' = WEAK(A) \circ R_\Delta$の場合:

$$\mu_{B_\Delta'} = \begin{cases} \dfrac{\mu_B}{x} & \cdots\ 0 \leqq \mu_B \leqq 0.25 \\ \dfrac{\mu_B}{x'} & \cdots\ 0.25 \leqq \mu_B \leqq 1 \end{cases} \qquad (37)$$

ここで,

表1　各方法による推論結果

	R_m	R_a	R_c	R_s	R_g	R_b	R_Δ
A^α	$(1-x_0)\vee\mu_B$ (*)	$1-x'+\mu_B$ (**)	μ_B	μ_B^{α}	$\begin{cases}\mu_B^{\alpha} \cdots \alpha\leqq 1\\ \mu_B \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$(1-x_0)\vee\mu_B$ (*)	$\mu_B^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$
INT(A)	$0.5\vee\mu_B$	$\frac{4\mu_B-1+\sqrt{9-8\mu_B}}{4}$	μ_B	$\begin{cases}2\mu_B^2 \cdots 0\leqq\mu_B\leqq 0.5\\ 1-2(1-\mu_B)^2 \cdots 0.5\leqq\mu_B\leqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_B \cdots 0\leqq\mu_B\leqq 0.5\\ 1-2(1-\mu_B)^2 \cdots 0.5\leqq\mu_B\leqq 1\end{cases}$	$0.5\vee\mu_B$	式(36)
slightly A	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vee\mu_B\right)\wedge m_0$ (***)	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}(1+\mu_B)\wedge 1$	$\mu_B\wedge m_0$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mu_B\wedge 1$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mu_B\wedge 1$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vee\mu_B$	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mu_B}\wedge 1$
sort of A	$(0.689\vee\mu_B)\wedge 0.779$	$\frac{c(\sqrt{4(1+\mu_B)+c^2}-c)}{2}\wedge 1$ $c=1.234\cdots$	$\mu_B\wedge 0.779$	$c\sqrt{\mu_B}\wedge 1$ (****)	$c\sqrt{\mu_B}\wedge 1$	$0.689\vee\mu_B$	$\sqrt[3]{c^2\mu_B}\wedge 1$
WEAK(A)	$0.5\vee\mu_B$	$\frac{3+4\mu_B-\sqrt{1+8\mu_B}}{4}$	μ_B	$\begin{cases}-2(\mu_B^2-\mu_B) \cdots 0\leqq\mu_B\leqq 0.5\\ 2(\mu_B-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2} \cdots 0.5\leqq\mu_B\leqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}-2(\mu_B^2-\mu_B) \cdots 0\leqq\mu_B\leqq 0.5\\ \mu_B \cdots 0.5\leqq\mu_B\leqq 1\end{cases}$	$0.5\vee\mu_B$	式(37)
MIDI(A)	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}(1+\mu_B)\wedge 1$	$\mu_B\wedge\frac{2}{3}$	$2\mu_B\wedge 1$	$2\mu_B\wedge 1$	$\frac{2}{3}\vee\mu_B$	$\sqrt{2\mu_B}\wedge 1$
MIDW(A)	1	1	$\frac{1}{3}\vee\mu_B$	1	1	1	1
αCUT(A)	$(1-\alpha)\vee\mu_B$	$(1-\alpha+\mu_B)\wedge 1$	μ_B	$\begin{cases}1 \cdots \mu_B\geqq\alpha\\ 0 \cdots \mu_B<\alpha\end{cases}$	$\begin{cases}1 \cdots \mu_B\geqq\alpha\\ \mu_B \cdots \mu_B<\alpha\end{cases}$	$(1-\alpha)\vee\mu_B$	$\frac{\mu_B}{\alpha}\wedge 1$
αCUT*(A)	1	1	$\mu_B\wedge\alpha$	1	1	1	1
αSCAL(A)	$\begin{cases}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\vee\mu_B\right)\wedge\alpha \cdots \alpha\leqq 1\\ \frac{\alpha}{\alpha+1}\vee\mu_B \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha+1}(1+\mu_B)\wedge\alpha \cdots \alpha\leqq 1\\ \frac{\alpha}{\alpha+1}(1+\mu_B)\wedge 1 \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_B\wedge\alpha \cdots \alpha\leqq 1\\ \mu_B \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha\mu_B \cdots \alpha\leqq 1\\ \alpha\mu_B\wedge 1 \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\mu_B\wedge\alpha \cdots \alpha\leqq 1\\ \alpha\mu_B\wedge 1 \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\vee\mu_B\right)\wedge\alpha \cdots \alpha\leqq 1\\ \frac{\alpha}{\alpha+1}\vee\mu_B \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{\alpha\mu_B}\wedge\alpha \cdots \alpha\leqq 1\\ \sqrt{\alpha\mu_B}\wedge 1 \cdots \alpha\geqq 1\end{cases}$

- (*) $x_0\ (\in[0,1])$ は $x^\alpha=1-x$ の解.　(**) $x'\ (\in[0,1])$ は $x^\alpha=1-x+\mu_B$ の解.　(***) $m_0=\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}\fallingdotseq 0.7376\cdots$.　(****) $c=1.234\cdots$

$$x = \frac{1}{3}\left(1 - 2\cos\frac{\theta+\pi}{3}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{27}{4}\mu_B\right)$$

$$x' = \frac{1}{3}\left\{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(27\mu_B - 5 + 9\sqrt{\frac{27\mu_B^2 - 10\mu_B + 1}{3}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(27\mu_B - 5 - 9\sqrt{\frac{27\mu_B^2 - 10\mu_B + 1}{3}}\right)}\right\}.$$

式(38)，(39)で与えられた結果はかなり複雑なので，図に表わしておくと，図5，6のようになる．この際，他の方法による場合との比較も兼ねて，他の方法による推論結果も図示してある．

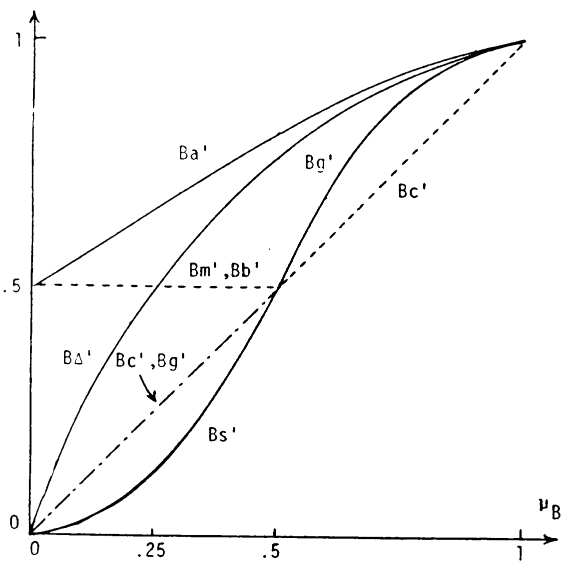


図5　INT(A)に対する推論結果

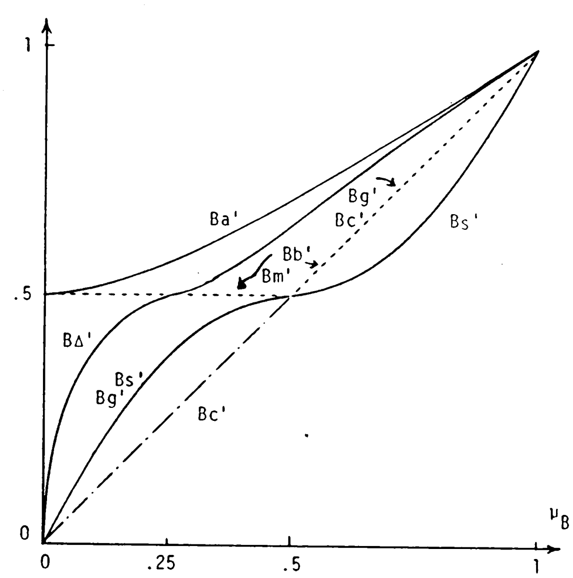


図6．WEAK(A)に対する推論結果

式(18)の推論形式において，もし$A'=A$であれば$B'=B$が得られるだろうと期待するのは当然であろう（modus ponensの成立）．この基準を満たすものとして，方法R_c, R_s, R_gがある（表1のA^αにおいて$\alpha=1$とした場合）．すなわち，これらの方法では$A \circ R = B$が得られる．また，$A' \approx A$であれば，やはり$B' \approx B$を得ることを期待するのは当然であろう(14)．この基準を満たすものとして方法R_sがある．R_sに対しては，$A'=A^\alpha$, INT(A), WEAK(A), αCUT(A), αSCAL(A)の時，$B'=B^\alpha$, INT(B), WEAK(B), αCUT(B),

αSCAL(B)なる推論結果を得る．しかし，他の方法ではこのような結果を得ていない（ただし，Rcでは常にBを得る（αSCAL(A)，$\alpha \leqq 1$，の場合以外））．さらに，式(18)において，$A' =$ not A であれば，$B' =$ unknown $(= \int_V 1/v)$ を期待するのは当然であろう[8]．この基準はRc以外のすべての方法が満たす．また，$A' \approx$ not A であれば $B' \approx$ unknown となる基準に対しては，Rc以外のすべての方法がこの基準を満たすものといえよう．たとえば，$A' =$ MIDW(A)，αCUT*(A) に対しては Rc以外すべて B' として unknown を得ている．なお，Aと not A の中間的な状態にある sort of A，slightly A，MIDI(A) に対しては，どのような推論結果が妥当であるかは今のところ分らない．

以上，直観的な基準の下ではあるが，方法Rsが最も妥当な推論結果を得ることが分った．

4. むすび

式(18)の推論形式において，$A' \approx A$ ならば $B' \approx B$，$A' \approx$ not A ならば $B' \approx$ unknown なる基準の下で，A（または not A）に似ている A' が与えられた時に，推論結果 B' は B（または unknown）にどのくらい似ているかを類似度尺度により算出することにより，各方法の良し悪しの定量的な解析が行えるであろう．このことから，slightly A，sort of A，MIDI(A) などのAと not A の中間的な A' に対してもどのような B' が得られれば妥当であろうかも分かるであろう．

文献

(1) Zadeh, L.A.: "Calculus of fuzzy restriction", in "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes", Acad. Press., pp. 1-39 (1975).

(2) Mamdani, E.H.: "Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems", IEEE Trans. Comp., C-26, 1182-1191 (1977).

(3) 水本："種々のファジィ推論法—If … then … の場合—，信学論(D)，J64-D，379-386 (1981).

(4) Mizumoto, M., Zimmermann, H.J.: "Comparison of fuzzy reasoning methods", Fuzzy Sets and Systems (in Press).

(5) Mizumoto, M., Zimmermann, H.J.: "Fuzzy inference methods", 9th Triennial Conf. on Operation Research, Hamburg, July 20-24, 1981.

(6) Fukami, S., Mizumoto, M., Tanaka, K.: "Some considerations on fuzzy conditional inference", Fuzzy Sets and Systems, 4, 243-273, 1980.

(7) 水本："Fuzzy 論理と近似的推論"，数理科学(多値論理特集号)，No.200，46-54，1980.

(8) Mizumoto, M., Fukami, S., Tanaka, K.: "Several methods for fuzzy conditional inference," Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, (Florida, Dec.12-14), 777-782, 1979.

(9) Mizumoto, M., Fukami, S., Tanaka, K.: "Some methods of fuzzy reasoning", in "Advances in fuzzy Set Theory and Applications", North-Holland, 117-136, 1979.

(10) Mizumoto, M., Fukami, S., Tanaka, K.: "Fuzzy conditional inference and fuzzy inference with fuzzy quantifiers", Proc. 6th Int. Conf. on Artificial Intelligence (Tokyo, Aug.20-23), 589-591, 1979.

(11) Mizumoto, M., Fukami, S., Tanaka, K.: "Fuzzy reasoning methods by Zadeh and Mamdani, and improved methods", 3rd Workshop on Fuzzy Reasoning, London, Sept.15, 1978.

(12) 深海，水本，田中："ファジィ推論について"，信学論(D)，61-D，533-540，1978.

(13) Zadeh, L.A.: "A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges," J. of Cybernetics, 2, 4-34, 1972.

(14) 菅野："あいまい集合と論理の制御への応用"，計測と制御，18，8-18，1979.